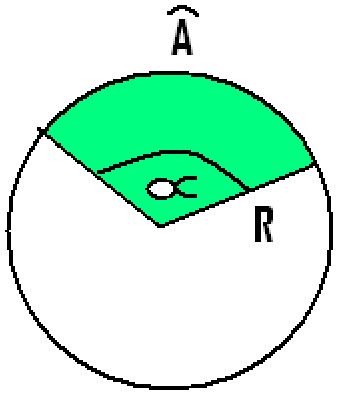
Conceptos previos

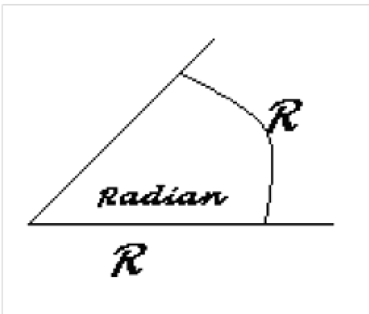
EL RADIÁN: Es una medida angular adimensional que se expresa por:

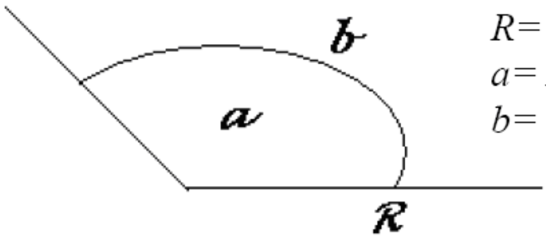


$$\boxed{\alpha \text{ radianes} = \frac{\hat{A}}{R}}$$

El arco se mide en unidades de longitud, lo mismo que el radio.

1 Radián: Es el Angulo que comprende entre sus lados un arco igual a su radio.



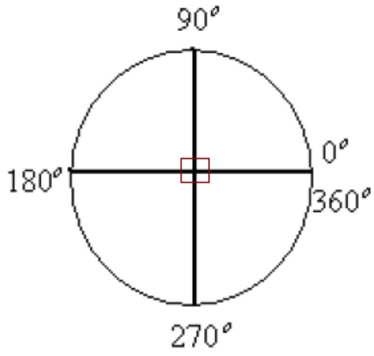


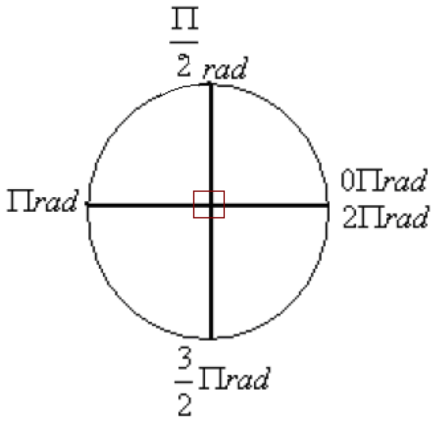
b = Arco
R= Radio
a= Ángulo (en radianes)
b= aR

Ejemplo :Los angulos asociados a los ejes coordenados expresados en radianes.

$a) 1rev \rightarrow 2\Pi rad$

$b) \Pi rad \rightarrow 180^o$

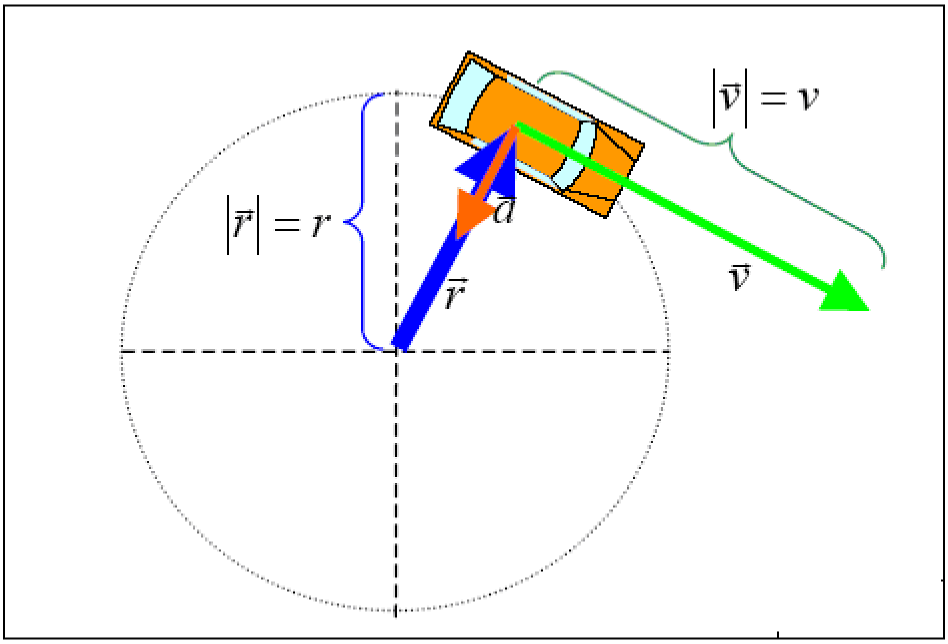




2. Movimiento circular uniforme

El movimiento circunferencial uniforme es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y cuya rapidez es constante. La figura 4 representa esta situación para un automóvil que está dando vueltas en una rotonda.

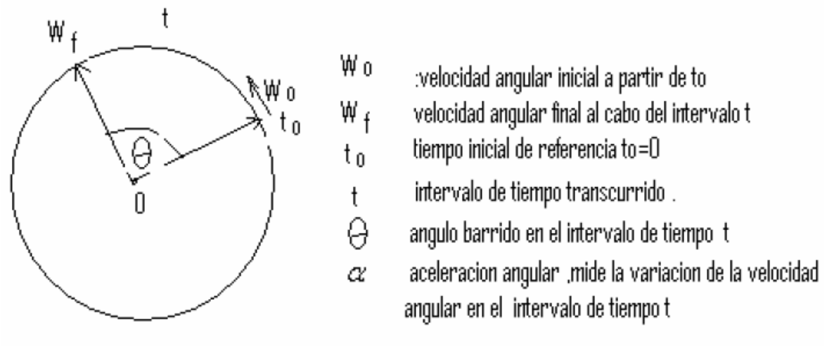
Es importante notar que en este caso, y en relación al centro de la trayectoria, el módulo de $\vec{r}$ corresponde al radio de la circunferencia, es decir, $|\vec{r}| = r$. La velocidad es en todo instante perpendicular a $\vec{r}$, es decir, $\vec{r} \perp \vec{v}$ y su módulo, por tratarse de un movimiento uniforme, es constante, es decir, $|\vec{v}|$ = constante.



Si T es el tiempo que tarda en completar una vuelta (período de traslación), entonces, como el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$, la rapidez resulta ser $|\vec{v}| = \frac{2\pi r}{T}$ y la rapidez angular $\omega = \frac{360^{o}}{T}$, si los ángulos se expresan en grados sexagesimales, y $\omega = \frac{2\pi}{T}$ si los ángulos se expresan en radianes. En este último caso se ve claramente que $|\vec{v}| = \omega r$.

Con un poco de geometría, para el movimiento circunferencial uniforme se puede demostrar que la aceleración está exactamente dirigida hacia el centro de la circunferencia, razón por la cual se denomina *aceleración centrípeta*, y que su módulo es: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$, o bien, $|\vec{a}| = \omega^2 r$.

Ahora bien, consideremos el caso de una partícula moviéndose en una trayectoria circular con rapidez tangencial constante, en estas condiciones, consideremos. α



Unidad de la aceleración angular: $\frac{Rad}{s^2}$

Sabemos que: $\alpha = \frac{W_f - W_o}{t} .de..donde..se..deduce..: W_f = W_o + \alpha t$

Por otro lado la aceleración angular media se define como el promedio entre dos velocidades angulares en un intervalo de tiempo , para este caso : $\alpha_m = \frac{W_f + W_o}{2}$ *, por lo que el ángulo barrido en radianes queda expresado por :* $\theta = W_m \times t$ *, una sustitución adecuada permite deducir que :*

$\theta = \left(\dfrac{W_o + \alpha t + W_o}{2} \right) \times t.$, que equivale a : $\theta = \left(\dfrac{2W_o + \alpha t}{2} \right) \times t.$,que equivale a : $\theta = \dfrac{2W_o t + \alpha t^2}{2}.$, que finalmente se expresa por : $\theta = W_o t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2.$

Como además: $\alpha_m = \dfrac{W_f + W_o}{2}$ y $\alpha = \dfrac{W_f - W_o}{t}$, *que escritas en un sistema:* $W_f - W_o = \alpha t$

$\theta = W_m \times t$

O bien; $W_f - W_o = \alpha t$ $\qquad W_f - W_o = \alpha t$

$$\theta = \frac{W_f + W_o}{2} \times t \quad \Rightarrow \quad W_f + W_o = \frac{2\theta}{t}$$

, *multiplicando ambas igualdades, se obtiene:*

$(W_f + W_o)(W_f - W_o) = \alpha t \times \dfrac{2\theta}{t}$, *cuyo desarrollo corresponde a:*

$W_f^2 - W_o^2 = 2\alpha\theta$, *o bien:* $W_f^2 = W_o^2 + 2\alpha\theta$

NOTA: Cuando el movimiento circular es uniformemente retardado, las expresiones anteriores cambian de signo, ya que la aceleración angular α *es negativa.*

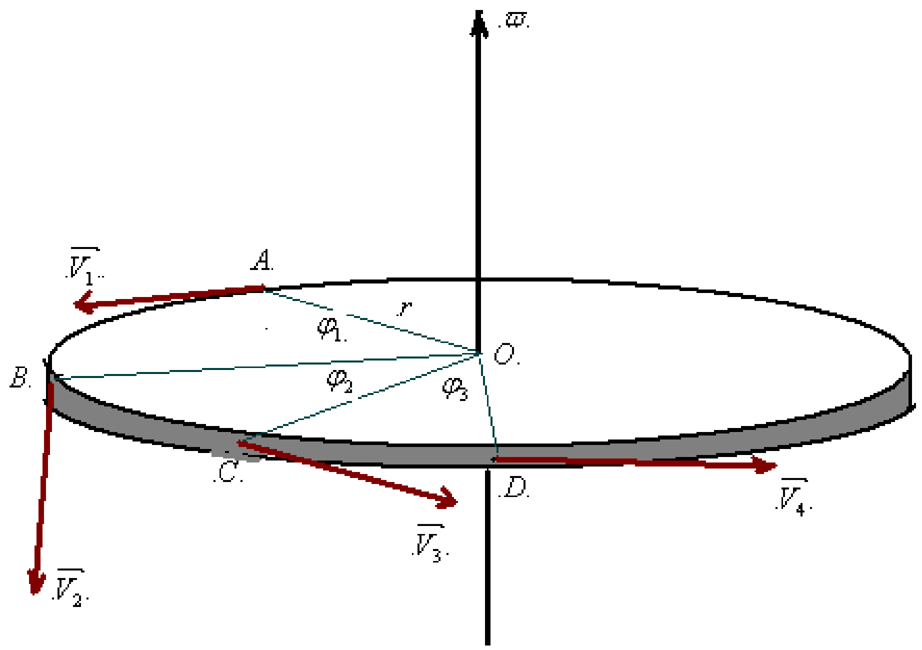
Resumen de las expresiones matemáticas:

1) $\theta = W_1 t \pm \frac{1}{2} a t^2$

2) $W_F^2 = W_i^2 \pm 2\alpha\theta$

3) $W_F = W_i \pm at$

DIRECCION DEL VECTOR VELOCIDAD ANGULAR DEL MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORMEMENTE VARIADO: Una partícula “m” se mueve con movimiento circular uniforme cuando su velocidad angular “W” es constante. Por lo tanto, al moverse sobre una circunferencia de radio R, recorre arcos iguales en tiempos iguales y el radio vector correspondiente describe ángulos iguales en tiempos iguales. Es decir, considerando la figura:



Los arcos: AB=BC=CD y los ángulos: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \ldots$, lo que implica que:

a) **rapidez constante :** $V_1 = V_2 = V_3$**…..(modulo de la velocidad es constante** $= \left|\vec{V}\right|$ **)**

b) **velocidad angular constante:** $\overrightarrow{\varpi_1} = \overrightarrow{\varpi_2} = \overrightarrow{\varpi_3}$ **.**

Luego en el movimiento circular uniforme tanto la rapidez tangencial como la velocidad angular son constantes.

Pero si la partícula se mueve de modo que varíe tanto su rapidez tangencial como su velocidad angular, el movimiento es variado. Cuando esta variación es constante, o sea, es la misma en el mismo intervalo de tiempo, el movimiento se llama **UNIFORMEMENTE VARIADO**.

Supongamos Para la siguiente figura que el intervalo de tiempo entre A y B, B y C, C y D y D y E es el mismo,

Con lo cual podemos escribir:

Arcos : AB<BC<CD<DE

Ángulos: $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$

Rapideces: $\mathbf{V}_1 < V_2 < V_3 < V_4$

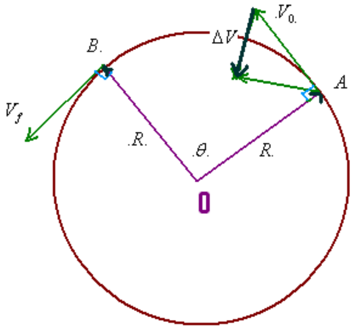
Veloc. Angular: $\mathbf{W}_1 < W_2 < W_3 < W_4$

ANALOGIA ENTRE CANTIDADES LINEALES Y ANGULARES.

DESPLAZAMIENTO LINEAL d / DESPLAZAMIENTO ANGULAR θ
RAPIDEZ LINEAL V / RAPIDEZ ANGULAR W
ACELERACION LINEAL A/ ACELERACION ANGULAR α

RELACION ENTRE LA RAPIDEZ CIRCUNFERENCIAL Y LA VELOCIDAD ANGULAR.

Consideremos para ello la siguiente situación :una partícula moviéndose en una trayectoria circular con aceleración constante , y por lo tanto , la partícula no posee aceleración tangencial , pero como la dirección del vector velocidad vería continuamente , la partícula posee aceleración centrípeta.



A :posición inicial

B :posición final

V_0 :velocidad tangencial inicial en el punto A

V_f velocidad tangencial final en el punto B

ΔV Cambio o variación de la velocidad

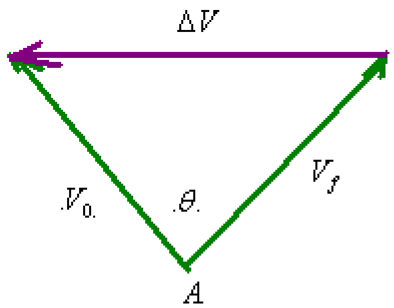
$\frac{\Delta V}{t}$ Cambio de velocidad en el tiempo t , corresponde a la aceleracion radial o centripeta

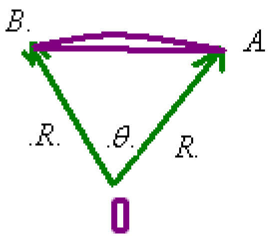
OA vector posición inicial

OB vector posición final

W velocidad angular en unidades rad/s

En los triángulos semejantes se pueden establecer las siguientes proporciones:





$\frac{\Delta V}{AB} = \frac{V}{R}$, o bien : $\Delta V = ABx\frac{V}{R}$, lo que dividido por t resulta: $\frac{\Delta V}{t} = \frac{AB}{t}x\frac{V}{R}$, para ángulos pequeños , no mas de 8º , el trazo AB se confunde con el arco AB , es decir la distancia lineal que recorre la partícula en el intervalo de tiempo t , entonces :

$a = \frac{\Delta V}{t} = \frac{arcAB}{t}x\frac{V}{R} = Vx\frac{V}{R} = \frac{V^2}{R}$, es decir: $a = \frac{V^2}{R}$

Como además : V=WxR , se obtiene también otra expresión para la aceleración centrípeta o radial , esto es :

$$a = \frac{(WR^2)}{R} = \frac{W^2R^2}{R} = W^2R$$

En resume: $a = W^2R$

GUÍA DE FÍSICA
M.C.U. Y M.C.U.V.

1.- Transformar:

a) $50rev \rightarrow rad.(R:100\pi \ \ rad)$

b) $48\pi \ \ rad \rightarrow rev.(R:24rev)$

c) $72\dfrac{rev}{seg} \rightarrow \dfrac{rad}{s}.(R:144\pi\dfrac{rad}{s})$

d) $1500\dfrac{rev}{\min} \rightarrow \dfrac{rad}{s}.(R:50\pi\dfrac{rad}{s})$

e) $7\pi\dfrac{rad}{s} \rightarrow \dfrac{rev}{\min}.(R:210\dfrac{rev}{\min})$

f) $2\dfrac{rad}{s} \rightarrow \dfrac{grados}{s}.(R:\dfrac{360^0}{\pi \ \ seg})$

2.- En una circunferencia de 20 cm. de radio se marca un arco de 45 cm. Expresar el ángulo del centro. (R: 2.225 rad)

3.- En una pista circular de 50 cm. de radio se marca el arco correspondiente a un ángulo del centro $62^0 12^{'} 45^{''}$. ¿Cuánto mide el arco? (R: $17.25\pi \ \ m$)

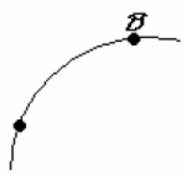
4.-En una pista circular de 25m de radio un corredor demora 10s en recorrer un arco. Si el ángulo del centro correspondiente es de 72^0.

a) ¿ Con qué rapidez la recorrió? (R: $\pi\dfrac{m}{s}$)
b) Si mantiene esta rapidez ¿Cuánto demora en dar una vuelta a la pista? (R 50 s)

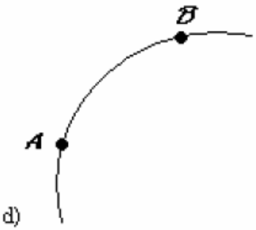
5.- En cada una de las figuras tenemos la trayectoria de una partícula que se desplaza de A a B. trace, en las figuras, el vector velocidad de la partícula en los puntos A y B, suponiendo que:
a) El movimiento es uniforme.
b) El movimiento es uniformemente acelerado.
c) El movimiento es uniforme
d) El movimiento es uniformemente acelerado

a)


b)

c)



d)

6.-

a) ¿Cuándo se puede decir que una partícula en movimiento posee aceleración centrípeta?

(R: Cuando se cambia la dirección y el sentido de $\vec{V}$)

b) Siendo $\vec{V}$ y $\vec{\alpha}_C$ los vectores velocidad y aceleración centrípeta de una partícula en un instante determinado, ¿Cuál es el valor del ángulo formado por estos vectores? (R: 90 grados)

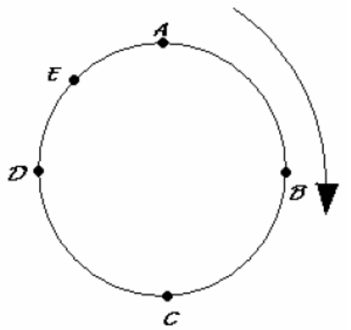
c)¿Por qué la aceleración que caracteriza la variación de la dirección del vector $\vec{V}$ se denomina aceleración centrípeta? (R: Apunta al centro)

7.- Un auto se encuentra en M.C.U.

a) Trace, en la figura, el vector velocidad del punto en cada una de las posiciones A,B,C,D,E que se muestran.

b) ¿Tiene el auto aceleración tangencial? ¿Posee aceleración centrípeta? (R: No, no es M.C.U., si, cambia la dirección y el sentido).

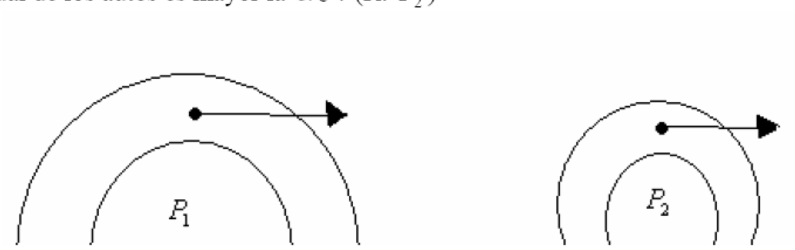
c) Trace, en la figura, el vector $\vec{\alpha}_C$ para cada una de las posiciones A,B,C,D,E que se indican.



8.- Dos autos se desplazan a una misma velocidad en las pistas P_1 y P_2, que se muestran en la figura..

a) ¿Cuál de las dos pistas tiene un radio mayor? (R: P_1)

b) ¿Para cuál de los autos es mayor la $\vec{\alpha}_C$? (R: P_2)



9.- a) ¿Cuándo podemos afirmar que una partícula en movimiento posee una aceleración tangencial? (R cuando varia la magnitud de la velocidad)

b) ¿Por qué esta aceleración se denomina aceleración tangencial? (R porque va tangente a la trayectoria)

c) Cuando la magnitud de la velocidad aumenta, ¿los vectores $\vec{V}$ y $\vec{\alpha}_T$ tienen el mismo sentido o sentidos contrarios? (R: tienen el mismo sentido)

d) Cuando la magnitud de la velocidad disminuye, ¿los vectores $\vec{V}$ y $\vec{\alpha}_T$ tienen el mismo sentido o sentidos contrarios? (R: tienen sentidos contrarios)

10.- De la pregunta 5 responda lo siguiente:

a) La partícula posee $\vec{\alpha_C}$. (R: a,b no tienen $\vec{\alpha_C}$, c,d tienen $\vec{\alpha_C}$)

b) La partícula posee $\vec{\alpha_T}$. (R: a,c no tienen $\vec{\alpha_T}$, b,d tienen $\vec{\alpha_T}$)

11.- Un barco se mueve sobre el Ecuador a 27.78 km/hr. Si recorre un arco de 8000 km, ¿Cuánto demoró y que ángulo del centro describió? (R: 287.9h, 71.9)

12.- En una circunferencia de 50cm de radio un cuerpo gira a 600 rev/min. Calcular la velocidad circunferencial y angular. $(R: 1000\pi \frac{cm}{s},\ 20\pi \frac{rad}{s})$

13.- El volante de una maquina que gira con una velocidad angular de $10\pi \frac{rad}{s}$ calcular la velocidad circunferencial en un punto situado a 25cm del eje. ¿Cuál es el periodo y la frecuencia?. $(R: 250\pi \frac{cm}{s},\ 0.2s,\ 5\frac{rev}{s})$

14.- La polea de un motor eléctrico gira 3000 rpm. Calcular su radio si un punto de la periferia tiene una rapidez circunferencial de $5\pi \frac{mts}{s}$ (R: 0.05m)

15.-Un ciclista pedalea con una rapidez constante. Si las ruedas tienen 75 cm. de diámetro, y giran a 20 rad/seg. ¿Cuántos km recorre en 3 h y 24 min? (R: 91.8 km)

16.- Un disco de R= 10cm da 84 vueltas en 12s. Calcular:

a) La frecuencia (R 1 rev/s)

b) El periodo (R 0.124s)

c) La velocidad tangencial y angular $(R: 140\pi \frac{cm}{s},\ 14\pi \frac{rad}{s})$

d) El arco descrito en 50s. $7000\pi\ cm)$

e) El ángulo que describe un radio vector en ese tiempo. $(R: 700\pi\ rad)$

17.- Un móvil se mueve en una circunferencia dando 200 rev/min. ¿Cuál es su velocidad tangencial angular en Rad. /seg? $R: 6.66\pi \frac{rad}{s}$

18.- Un móvil se mueve en una circunferencia de 25m de radio dando una vuelta en ¼ de segundo. ¿Cuál es su velocidad tangencial? $(R: 200\pi \frac{m}{s})$

19.- Marcar dos puntos o más puntos situados a distintas distancias del centro de un disco que gira.

a) Compare la rapidez circunferencial de ellos $(R: V_B \succ V_A)$

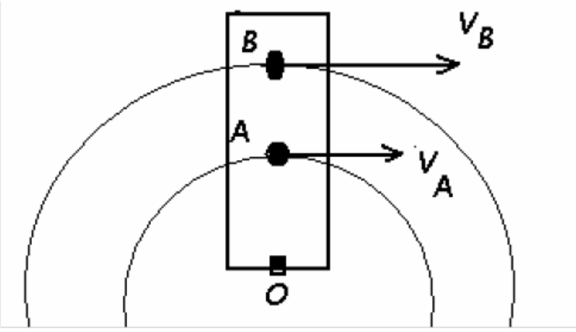
b) Compare la velocidad angular de ellos. $(R: W_A = W_B)$

20.- Una barra gira con movimiento uniforme, alrededor de un eje que pasa por el punto 0, efectuando dos revoluciones por segundo. Para los puntos A y B de la barra, situados a las distancias $R_A = 2m \quad y \quad R_B = 3m$ del eje de rotación, calcular:

a) El periodo de movimiento de cada uno (R 0.5s)

b) Las velocidades angulares $W_A\ y\ W_B$.$(R: 4\pi \frac{rad}{seg})$

c) las velocidades lineales V_A y V_B.$(R: 8\pi \frac{m}{s},$ 12



21.-suponga que la pista tiene un radio de 100 m, y que el auto da 2 vueltas en cada minuto.Calcule:
21.1.- el periodo del movimiento del auto.
21.2.-la distancia que recorre en cada revolución
21.3.-la velocidad lineal del vehiculo
21.4.-la aceleración centrípeta del vehiculo.

(30 s , 200 $\pi m, 6.66\pi \frac{m}{s}, 0.44\pi \frac{m}{s^2}$)

22.-Para el movimiento considerado en el ejercicio anterior, determine:
22.1.- El valor del ángulo en grados y radianes. que el auto describe en un periodo.
22.2.-La velocidad angular del vehiculo.
(360º o 2π Rad. , 0.066π , 12)

23.-Calcular la velocidad angular de un cuerpo para el cual $\Delta\,\theta = \frac{\pi}{2}$ rad y Δt= 0.5 s.

(π rad/s)
23.2.-Calcular el periodo el movimiento del cuerpo.
23.2.-Si el radio es 10 cm .Calcular la velocidad lineal de este cuerpo.
(2 s , 10 π cm/s)
24.-Una rueda gira a 48 rev/min .Calcular la velocidad angular de un punto cualquiera de la misma y la velocidad lineal de un punto situado a 1 m de su centro.
(1.6 π m/s , 1.6π rad/s)

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMENETE VARIADO (M.C.U.V)

25.-La velocidad angular de una rueda aumenta uniformemente a partir del reposo y al cabo de 15 segundos es de 900 rpm .Calcular la aceleración angular.
(2 π rad/s^2)
26.-La velocidad angular de un motor que gira a 1800rpm desciende uniformemente hasta 1200 rpm en 2 segundos. Hallar la aceleración angular del motor y el número de vueltas que realiza.
(10 π rad/s^2 , 50 rev)
27.-Un disco gira con una aceleración constante de 5 rad/ s^2 .Calcular el numero de vueltas que da en 8 s partiendo del reposo.
($\frac{80}{\pi}$ rev)
28.-La velocidad angular de un motor que gira a 900 rpm desciende uniformemente hasta 300 rpm efectuando 50 rev.Calcular la aceleración angular y el tiempo necesario para realizar las 50 revoluciones.
(4π rad/s^2 , 5 s)
29.-Una rueda que gira a razón de 120 rev/mmin , incrementa uniformemente su velocidad hasta 660 rev/min. En 6 s .Calcular la aceleración angular.
(3π rad/s^2)

30.-La velocidad angular de un disco disminuye desde 12 a 4 rad/s en 16 s.Calcular la aceleración angular y el número de vueltas que efectúa en ese tiempo.

$(0.5\ rad/s^2\ ,\ \frac{64}{\pi}\ rev)$

31,.¿Cuantas vueltas dará una rueda en 5 s , si partiendo del reposo su aceleración angular es de 20 rad/s^2 .

$(\frac{45}{\pi}\ rev.)$

32.-La velocidad angular de una rueda es de 6 rev/s , sabiendo que su aceleración angular es de 4 rad/s^2 .Calcular el numero de vueltas que dará hasta adquirir una velocidad de 26 rev/s y el tiempo que empleara en alcanzarla?

$(1690\pi\ rev.\quad 10\pi\ s)$

33.-Una rueda que gira con una velocidad de 2100 rev/ min . disminuye esta uniformemente hasta 900 rev/mmin , efectuando 80 vueltas . Calcular la aceleración angular y el tiempo.

$(6.25\ rev/s^2\ ,\ 3.2\ s)$

Montoya.-